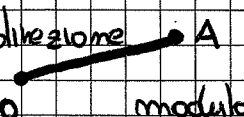
08/03/11 Algebra Bonanno

Ricevimento 14:30 LUNEDI (DUA) VENERDI 15:00

1

## Vettori applicati

- Vettore = segmento che ha origine in O, ha modulo, direzione e verso
- $A^2$ = piano euclideo (2 dimensione)
- $A^3$ = spazio euclideo (3 dimensione)
- Fissato O, indichiamo con $V_O^2$ {insieme dei vettori applicati in O}
  {vettori di $A^2$ applicati in O}

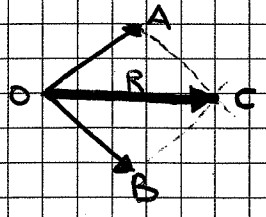



modulo = distanza
direzione = retta

$\phi_O : A^2 \to V_O^2$ BIGEZIONE

$\phi_O(A) = \overrightarrow{OA}$ ad un punto A del piano associo un vettore $\overrightarrow{OA}$

OPERAZIONI TRA VETTORI = somma + su $V_O^2$ vettori applicati nello stesso punto.




$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (R) \to \overrightarrow{OC}$

**Proposizione** $(V_O^2, +)$ è un gruppo commutativo

(i) associativo della somma $\{\forall A,B,C \quad (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\}$

(ii) esistenza elemento neutro $\{\exists \vec{0}$ T.c $\forall A \quad \overrightarrow{OA}+\vec{0}=\overrightarrow{OA}\}$

(iii) esistenza dell'opposto $\{\forall A \; \exists A'$ T.c $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA}\}$

(iv) commutativo $\{\forall A,B \quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\}$

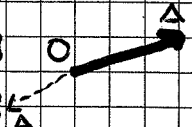
elemento neutro
$\vec{0}$ = vettore le cui punte
dei O e finisce in O

$\vec{0}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Su $V_O^2$ la moltiplicazione per uno scalare

$\lambda \in \mathbb{R}$




$\lambda \overrightarrow{OA}$ se positivo $\lambda \geq 0$ non cambio verso ma modulo

$|\overrightarrow{OA_\lambda}| = \lambda |\overrightarrow{OA_\lambda}|$

se $\lambda < 0$ prendo l'opposto, allora il vettore

$|\overrightarrow{OA_\lambda}| = |\lambda| |\overrightarrow{OA}|$

$\overrightarrow{OA_\lambda} = (-\lambda)(\overrightarrow{OA_\lambda})$

**Proposizione** $(V_O^2, +)$ con la moltiplicazione per uno scalare $\in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

(i) $\forall \lambda ; \forall A,B \quad \lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \lambda(\overrightarrow{OB}) + \lambda(\overrightarrow{OA})$

(iii) $\forall \lambda, \mu \; \forall A \quad (\lambda+\mu)\overrightarrow{OA} = \lambda|\overrightarrow{OA}| + \mu|\overrightarrow{OA}|$

(iii) $\forall \lambda, \mu \quad \forall A \quad (\lambda \cdot \mu)\vec{OA} = \underbrace{\lambda \cdot (\vec{OA}) + \mu(\vec{OA})}_{\lambda(\mu \vec{OA})}$

(iv) $\forall A \quad 1 \cdot \vec{AO} = \vec{OA} \; ; \; 0 \cdot \vec{OA} = \vec{OO}$ ← vettore nullo

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

**Esempio** $(V_O^2, +)$

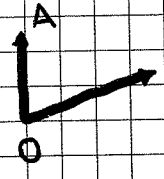
$\mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dove $x$ e $y$ sono numeri reali $\quad \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

↓ insieme di coppie

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x_1 \\ y+y_1 \end{pmatrix}$ sommo i singoli elementi $\quad \{$ è un gruppo commutativo $\}$

$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \{$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}\}$

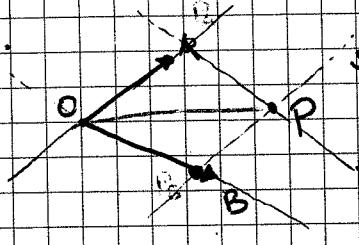
Coordinate su $V_O^2$ (insieme di vettori applicati al punto O)




fissiamo $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ non proporzionali ($\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ T.c. $\vec{OA} = \lambda \vec{OB}$)

**Proposizione** $\forall P \; \exists! \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ T.c. $\vec{OP} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$ ← esistono e sono unici

dim.




$\vec{OP_A}$ e $\vec{OP_B}$

$\in \lambda \vec{OA} \quad \in \mu \vec{OB}$

$\vec{OP} = \vec{OP_A} + \vec{OP_B} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$ } esistono

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ T.c. $\lambda_1 \vec{OA} + \mu_1 \vec{OB} = \lambda_2 \vec{OA} + \mu_2 \vec{OB} = \vec{OP}$

dovremo algebricamente sull'uguaglianza, ottengo

$\lambda_1 \vec{OA} - \lambda_2 \vec{OA} = \mu_1 \vec{OB} - \mu_2 \vec{OB}$ } unicità

$(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{OA} = (\mu_1 - \mu_2)\vec{OB}$ esiste solo in un caso quando le rette si intersecano in un punto e $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \vec{OO} \quad \vec{OO} \to \mu_1 = \mu_2$

$\mathcal{R} = \{O, \{\vec{OA}, \vec{OB}\}\}$ insieme di riferimento affine

HO UN PUNTO O SCELTO ARBITRARIAMENTE

$B\{\vec{OA}, \vec{OB}\}$ combinazione lineare degli elementi della base

**BASE**

$B\{\vec{i}, \vec{j}\}$

$\sim o \sim o \sim$

$V_O^2 \xrightarrow[F_B]{} \mathbb{R}^2$ $F_B$ è un isomorfismo $\begin{cases} F_B \text{ è biiettiva} \\ F_B \text{ preserva la struttura algebrica} \end{cases}$

(i) $F_B(\vec{OP}, \vec{OQ}) = F_B(\vec{OP}) + F_B(\vec{OQ})$

$(\lambda_1, \mu_1) \quad (\lambda_2, \mu_2)$

(ii) $F_B(\lambda(\vec{OP})) = \lambda F_B(\vec{OP})$ dove $\lambda = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

**NELLO SPAZIO**

coordinate di $V_O^3$ $\mathcal{R} = \{O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}\}$

dato la base, posso costruire un applicazione

$F_B : V_O^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\vec{OP} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \sigma\vec{k}$

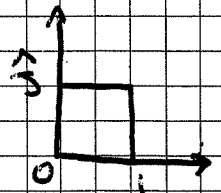
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ esiste ed è unico

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

**29/03/11**

Es_1




$\mathcal{R} = \{O; \{\vec{i}, \vec{j}\}\}$ i vettori devono essere lunghi 1 (versori)

$P \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Il vettore OP è una combinazione lineare dei due versori i e j $OP = xi + yj$

$V_O^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$ $F_B$

Base canonica di $\mathbb{R}^2 = \{e_1, e_2\}$ ↑ i 2 vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{OP} = 3\hat{i} + \hat{j}$

$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vettore di $\mathbb{R}^2$ che identifica il piano comb. di $\mathcal{B}$ con coordinate $(1,1)$

$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}\}$

Rispetto alla base canonica supponiamo che P ha coord $(4,3)$

$P = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ coord. di P rispetto alla nuova base

$f_{\mathcal{B}_V}(P) = ?$ $\quad P = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

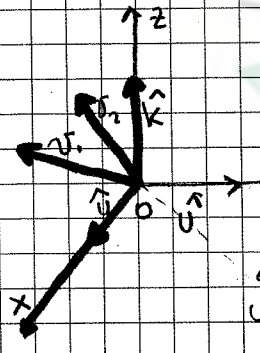
↓

Uso somma e prod. per scalari su $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \lambda = 4 \\ \lambda + 2\mu = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu = -1/2 \end{cases}$$ → ammette un unica soluzione x il th. dei vettori

quindi $f_{\mathcal{B}_V}(P) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Esercizio 2




← SPAM DI UN VETTORE

$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{i}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\hat{j}$ $\quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\hat{k}$

$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{v_1} = \lambda \overrightarrow{v_2}$ non ha soluzioni, i vettori non sono prop.

$\text{Span}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\} = \{\lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2} \;/\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ Piano

$\text{Span}\{\overrightarrow{v_1}\} = \{\lambda v_1 \;/\; \lambda \in \mathbb{R}\}$ Retta

↓

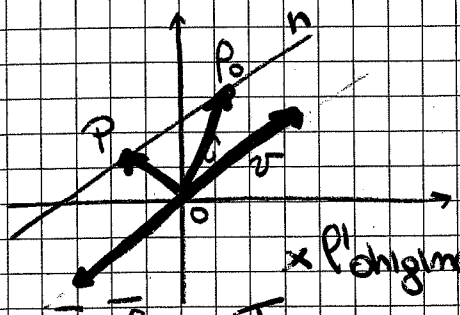
di un vettore sono tutti i vettori proporzionali a lui; cioè è una retta, che passa x l'origine (perché i vettori sono applicati all'origine)

Se ho fascio con 2 vettori ottengo 1 piano, che passa x l'origine (se $\vec{v_1}$ è parallelo a $\vec{v_2}$ il piano degenera in una retta)

$\vec{v_1} \neq \lambda \vec{v_2}$



## RETTA NON PASSANTE X L'ORIGINE




$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Uso quando ho un punto e un vettore

Voglio descrivere la retta che non passa x l'origine.

$\overline{OP} - \overline{OP_0}$ Fisso un punto ($P_0$) e mi chiedo, un altro punto P quando appartiene al $\mathbb{R}$?

Cerco prima una retta parallela ed r che passa x l'origine

$P \in h \leftrightarrow \overline{OP} - \overline{OP_0} \in h_0 \leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\overline{OP} - \overline{OP_0} = \lambda \vec{v}$

$\vec{v}$ → vettore che genera la retta $h_0$

$$r = \{ \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{v} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Un punto è sul piano se per qualche $\lambda$, le sue coordinate si possono scrivere così.

$\{ \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{v} \} = r$

$r \cap s = \emptyset$

$\{ \overrightarrow{OQ_0} + \mu \vec{w} \} = s$

$$P \in r \cap s \leftrightarrow \begin{cases} \exists k \text{ t.c. } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + k\vec{v} \\ \exists h \text{ t.c. } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ_0} + h\vec{w} \end{cases}$$

$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ $Q_0 = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} v_0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$